No.
Date. / /

番外篇 概率论进阶

CLT $\begin{cases} \text{矩方法} \\ \text{替换技巧} \end{cases}$

随机矩阵初步

Matrix meets Probability

统计力学模型 $\begin{cases} \text{信息熵} \\ \text{Ising 模型} \end{cases}$

§1 CLT revisited

(I) 矩方法.

设 $X \sim N(0,1)$, $E[X^k] = \begin{cases} 0 & , k \text{ odd} \quad (\text{对称性}) \\ (2m-1)!! & , k=2m. \end{cases}$

证: 当 $k=2m$. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ 组合意义: $1, 2, \ldots 2m$ 配对数

$\overset{\text{分部}}{=} (2m-1) \int x^{2m-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$= \cdots$

$= (2m-1)!!$

定理1: 设 $\{X_k\}$ 相互独立, 满足

(1) $E[X_k]=0$, $Var(X_k)=1$. $\forall k$. (各阶矩一致有界)

(2) 一致有界高阶矩, $\forall k \geq 3$. $\sup_j E[|X_j|^k] = C_k < \infty$

则 $(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n)^k$ 的期望 $E[(\frac{S_n}{\sqrt{n}})^k] \longrightarrow \gamma_k$, 当 $n \to \infty$ $(\gamma_k = E[X^k])$

$S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$. (可推知 $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$)

证明: $E[(\frac{S_n}{\sqrt{n}})^k] = \sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n} \frac{1}{n^{\frac{k}{2}}} \cdot E[X_{i_1} \ldots X_{i_k}]$

Step 1 当 $k=1$

$$RHS=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]=0$$

Step 2 当 $k=2$ $RHS=\frac{1}{n}\sum\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}]$
$=1$

Step 3 当 $k=3$

$$RHS=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i_1,i_2,i_3}\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}]$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^3]}_{\le nC_3}+3\underbrace{\sum_{i_1\ne i_2}\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}^2]}_{=0}+\underbrace{\sum_{i_1\ne i_2\ne i_3}\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}]}_{=0}\Big)$$

$$=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Step 4 当 $k=4$

$$RHS=\frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{\sum_{i_1}\mathbb{E}[X_{i_1}^4]}_{\le nC_4}+3\underbrace{\sum_{i_1\ne i_2}\mathbb{E}[X_{i_1}^2X_{i_2}^2]}_{=\sum_{i_1\ne i_2}1\cdot 1=n(n-1)}+4\underbrace{\sum\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}^3]}_{=0}$$
$$+6\underbrace{\sum_{i_1\ne i_2\ne i_3}\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}^2]}_{=0}+\underbrace{\sum_{i_1\ne i_2\ne i_3\ne i_4}\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}]}_{=0}\Big)$$

$$=\frac{3n(n-1)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\to 3$$

注：前四阶矩一样，一般而言就是同一个随机变量 (人为可构造不同的)

Step 5 一般 k

RHS 非零项必为 $\mathbb{E}[X_{i_1}^{a_1}\cdots X_{i_m}^{a_m}]$ 其中 $a_j\ge 2,\ \forall j$，$i_1\ne\cdots\ne i_m$.

且 $\sum_{j=1}^{m}a_j=k$，因此 $m\le\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ (m为整数，可取整)

当 k odd 时，$m<\frac{k}{2}$，$RHS=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

当 k even 时，只需关心 $m=\frac{k}{2}$

我们取 $i_1\ i_2\ \ldots\ i_{2m-1}\ i_{2m}$ 一种配对 给定一种求和下标的方式.

由 $k=2m$ 时，$a_1=\cdots=a_m=2$.

主项之和 $\sum_{i_1\ne i_2\ne\cdots\ne i_m}\frac{1}{n^m}\mathbb{E}[X_{i_1}^2\cdots X_{i_m}^2]\cdot(?)$

"$C_n^m\cdot\frac{2m!}{2!2!\cdots 2!}$"

$$=(2m-1)!!\ \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m}\longrightarrow(2m-1)!!$$

① 从n个元中选m个
② 从$2m$个格子中对i_1选2个位置 剩$2m-2$个对i_2选2个位置 etc...

No.
Date. / /

定理 2：(矩收敛)
假设
(1) $\forall k$. $\gamma_{k,n} = \mathbb{E}[X_n^k]$ 存在
(2) $\forall k$. $\gamma_{k,n} \to \gamma_k$, $n\to\infty$
(3) $\exists X$ s.t. $\gamma_k = \mathbb{E}[X^k]$ 且
满足 Carleman 条件. 或 Riesz 条件: $\liminf\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}(\gamma_{2k})^{\frac{1}{2k}} < \infty$.
$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k})^{-\frac{1}{2k}} = \infty$
则 $X_n \xrightarrow{D} X$ (意味着矩序列决定了分布)

· CHECK Carleman 条件
在正态分布下：$(\gamma_{2k})^{\frac{1}{2k}} = ((2k-1)!!)^{\frac{1}{2k}}$
$$= \left(\frac{2k!}{k!\,2^k}\right)^{\frac{1}{2k}}$$
$$= \left(\frac{(2k/e)^{2k}\sqrt{2\pi 2k}}{(k/e)^k\sqrt{2\pi k}\cdot 2^k}\right)^{\frac{1}{2k}}$$
$\sim \sqrt{k}\cdot C$ (Riesz 条件也满足).

(II) Lindeberg Replacement
引理 3 $X_n \xrightarrow{D} X$ 等价刻划.
(1) $\forall g \in C_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[g(X_n)] \to \mathbb{E}[g(X)]$
(2) $\forall g \in C_b(\mathbb{R})$, $g^{(1)}, \dots g^{(m)} \in C_b(\mathbb{R})$ 给定 $m\geq 0$, $\mathbb{E}[g(X_n)] \to \mathbb{E}[g(X)]$
(3) $\phi_n(t) \to \phi(t)$.

证明思路：$\phi_n(t) = \mathbb{E}[\cos(tX)] + \mathbb{E}[\sin(tX)]$
$g(x) = \cos(tx), \sin(tx)$ 有好光滑性.

定理 4. $\{X_k\}$ 相互独立. $\mathbb{E}[X_k]=0$, $b_k^2 = Var(X_k)$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$
$\forall \varepsilon>0$, $\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2 I_{\{|X_k|>\varepsilon B_n\}}] \to 0$
则 $\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{D} N(0,1)$.

No.
Date.

(一个高级知识)　　思想：逐步用 Y_k 换 X_k.

证明：取 $\{Y_k\}$ 独立正态，$Y_k \sim N(0, b_k^2)$ 且与 $\{X_k\}$ 独立.

令 $\xi_{nk} = \sum_{1\le i<k} X_i + \sum_{k<i\le n} Y_i$，$1\le k\le n$．(无 k^{th} 项) 同时就有与 X_k, Y_k 独立

则 $\xi_{nn}+X_n = S_n$，$\xi_{n1}+Y_1 \overset{D}{=} B_n Y$，$Y\sim N(0,1)$ (标准差 B_n)

且 $\xi_{nk}+X_k = \xi_{n,k+1}+Y_{k+1}$，$1\le k\le n-1$

则 $E[g(\frac{S_n}{B_n})] - E[g(Y)]$　　类似于裂项

$$=\sum_{k=1}^n \left(E[g(\frac{\xi_{nk}+X_k}{B_n})] - E[g(\frac{\xi_{nk}+Y_k}{B_n})]\right)$$

同时在 $\frac{\xi_{nk}}{B_n}$ 处展开，由引理3(2)，设 $g, g', g'', g^{(3)} \in C_b(\mathbb{R})$

$$g:\ g(\frac{\xi_{nk}+X_k}{B_n}) = g(\frac{\xi_{nk}}{B_n}) + g'(\frac{\xi_{nk}}{B_n})\frac{X_k}{B_n} + \frac{g''}{2!}(\frac{X_k}{B_n})^2$$

由 $E[g'(X_k-Y_k)] \overset{独立性}{=} 0$

$E[g''(X_k^2-Y_k^2)] \overset{二阶矩同为 b_k^2}{=} 0$

记 $h(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+t)-g(x)-g'(x)t-\frac{1}{2}g''(x)t^2|$.

该控制对任意 t 成立.

则 $\exists K>0$，s.t. $h(t)\le K t^2\wedge|t|^3$　　(源于 $g\in C_b(\mathbb{R})$)

因此 $|E[g(\frac{S_n}{B_n})] - E[g(Y)]|$

$$\le \sum_k \left(E[h(\frac{X_k}{B_n})] + E[h(\frac{Y_k}{B_n})]\right)$$

其中 $\sum_k E[h(\frac{Y_k}{B_n})] \le K\cdot\sum_k E[|\frac{Y_k}{B_n}|^3]$　　Y_k 标准差 b_k. $Y_k \overset{D}{=} b_k Y$

$= K\cdot\sum_k \frac{b_k^3}{B_n^3} E[|Y|^3]$

分一个 $b_n\le\max_k b_k$ 出来

$\le C\cdot\frac{(\max_{1\le k\le n} b_k)}{B_n} \to 0$　　(满足 Lindeberg 则满足 Feller)

$\triangleq A_k$

对 X_k 划分 $\{|X_k|\le \varepsilon B_n\}$，$\{|X_k|>\varepsilon B_n\}$　拆成 $|\frac{X_k}{B_n}|\le\varepsilon$. $\sum E[|\frac{X_k}{B_n}|^2]=1$.

$$则 \sum_{k=1}^n E[h(\frac{X_k}{B_n})] \le \underbrace{\sum_k E[|\frac{X_k}{B_n}|^3 I_{A_k}]}_{\le\varepsilon} + \underbrace{\sum_k E[|\frac{X_k}{B_n}|^2 I_{A_k^c}]}_{L条件}$$

取上极限 $\le\varepsilon$

No.
Date. / /

More is different — P.W. Anderson
多者异也.

§2 随机矩阵初步 (学习一个学科. 动机很重要)

I. 起源

统计 1928 Wishart

样本协方差

$W = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_k^T = \frac{1}{n} X X^T$ ← 非负定　其中 $X = (X_1, \dots X_n)_{p\times n}$

其中假设 $\{X_k\}$ i.i.d, $X_k \sim N(0, I_p)$　(X_k为向量)

此时 X 矩阵元联合分布

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{pn}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(XX^T)}$

物理 1955 Wigner

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = H\psi(t,\vec{x})$　$\vec{x}$维数一般为3倍数.

$H = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})$

复杂 ⇒ 随机性进入 ⇒ 截断 H矩阵.
+强相互作用

$H_n = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $H_n = H_n^T$.

$\{h_{ij}\}$ 随机变量列

Question: 当 $n\to\infty$时, H_n 谱的统计行为.

大维随机矩阵.

2. 高斯正交系综. (Gaussian Orthogonal Ensemble) GOE

综: 有一些随机的东西 如噪声.

$X: \Omega \to Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

$\omega \mapsto (X_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n$

设 $X = (X_{ij})_{i,j=1}^n$　$\{X_{ij}\}$ i.i.d. $N(0,\sigma^2)$.

令 $A_n = \frac{X+X^T}{2}$ (对称)　$A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.

扫描全能王 创建

No. recall: $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow aX+b \sim N(a\mu+b, (a\sigma)^2)$

Date. / /

$X+Y \sim N(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$

$X-Y \sim N(\mu_X-\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$

明显有. $a_{ii}=X_{ii} \sim N(0,\sigma^2)$

$a_{ij}=\frac{X_{ij}+X_{ji}}{2} \sim N(0,\frac{\sigma^2}{2}) \quad (i<j)$

且 $\{a_{ij}: 1\le i\le j\le n\}$ 相互独立.

因此 A_n 矩阵元联合密度

$$f(A_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{a_{ii}^2}{2\sigma^2}}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}e^{-\frac{a_{ij}^2}{\sigma^2}}$$

$$=\left(\prod_{i\neq j}e^{-\frac{a_{ij}^2}{2\sigma^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}^{\frac{n^2}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{n(n+1)}{4}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{Tr}A_n^2}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}(\pi\sigma^2)^{\frac{n(n+1)}{4}}}e^{-\frac{\mathrm{Tr}A_n^2}{2\sigma^2}}$$

$\mathrm{Tr}A_n^2 \rightsquigarrow$ 转化为特征值平方和

称:$A_n \sim GOE_n(\sigma^2)$

例:n=2 , $\det(z-A_n)=0$.

A_n 正交不变性: $\forall Q \in O(n) = \{X\in M_n(\mathbb{R}): XX^T=I_n\}$ n阶正交群

$\underbrace{QA_nQ^{-1}}_{\text{该变化下. trace } A_n \text{不发生改变.}} \sim GOE_n(\sigma^2)$ (事实上,算 $|J|=1$).

另一种看法: $QA_nQ^{-1}=\frac{1}{2}(QXQ^{-1}+QX^TQ^{-1})$

由独立性. 只用验证 QXQ^{-1} 矩阵元为 i.i.d. $N(0,\sigma^2)$

亦 CHECK QX 与 X 同分布 (从而 $QXQ^{-1}\overset{d}{=}QX\overset{d}{=}X$).

事实上,只需考查 QX_1 与 X_1 同分布 (X_1为第一列对应列向量)

X元素均独立

由 $X_1\sim N(0,\sigma^2 I_n) \Rightarrow QX_1\sim N(0,\sigma^2 I_n)$ 立得

√注: A_n 特征值联合密度为 $f_n(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{Z_n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}x_j^2}\left|\prod_{i<j}(x_j-x_i)\right|$

(不需证明) $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. Z_n 为一个归一化常数.

当特征值很近时, $x_j-x_i\to0$. 该情况概率很低 $\rightsquigarrow$ "排斥效应"

3. Wigner 半圆律

Wigner 矩阵.

实 $A_n=(a_{ij})$, $a_{ij}=a_{ji}$ $\forall i\le j$.

基本假设
- $\{a_{ij}: 1\le i\le j\le n\}$ 相互独立
- $\{a_{ii}\}$ 与 Y 同分布, $\{a_{ij}: 1\le i<j\le n\}$ 与 Z 同分布
- $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[Z]=0$, $Var(Y)<\infty$, $Var(Z)=1$

  且 $\forall k\ge 3$. $\mathbb{E}[|Y|^k]$, $\mathbb{E}[|Z|^k]<\infty$

记号 $\gamma_k=\begin{cases}0 & , k=2m+1\\ \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m} & , k=2m.\end{cases}$

$\gamma_k=\int_{-2}^{2}x^k\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx$ (第一次作业) √

定理 (Wigner semicircle law)

$\frac{1}{n}\mathbb{E}[Tr(\frac{A_n}{\sqrt{n}})^k]\longrightarrow\gamma_k$, $n\to\infty$.

我们先尝试一些比较小的k.

$k=2$. $Tr\,A_n^2=\sum_{j,i=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$

$\mathbb{E}[Tr\,A_n^2]=n(n-1)\cdot\cancel{Var(a_{ij})}\,\mathbb{E}[a_{ij}^2]+n\,Var(Y)$

$\|$ $\quad =n(n-1)+n\,Var(Y)$

$\sum_k\mathbb{E}[X_k^2]=n\,\mathbb{E}[X_1^2]$

$\Rightarrow\mathbb{E}[X_1^2]\sim n$, $X_1\sim\sqrt{n}$

证明: $\frac{1}{n}\mathbb{E}[tr(\frac{A_n}{\sqrt{n}})^k]=\frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\underbrace{\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ki_1}]}_{RHS}$

$k=1$. $RHS=\sum_{i_1}\mathbb{E}[a_{i_1i_1}]=0$ (在矩阵中若期望不为0是很复杂的)

$k=2$. $RHS=n^2+O(n)$

$k=3$. $RHS=\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{n}\mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}a_{i_3i_1}]$ ← $(i_3=i_1)$

$=\begin{cases}\sum_{i_1,i_3}\mathbb{E}[a_{i_1i_1}a_{i_1i_3}^2]=O(n) & i_1=i_2\\ \sum_{i_1\ne i_2}\mathbb{E}[a_{i_1i_2}^2a_{i_1i_1}]=0 & i_1\ne i_2,\ i_3=i_1\\ =0 & i_1\ne i_2,\ i_3=i_2\\ \sum_{i_1\ne i_2\ne i_3}\mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}a_{i_3i_1}]=0 & i_1\ne i_2\ne i_3\end{cases}$

$K=4$. 记 4条边 $\{i_1,i_2\}$, $\{i_2,i_3\}$, $\{i_3,i_4\}$, $\{i_4,i_1\}$

若四条边中有一条与其它不同. 由独立性. 对应该项为0

否则, 每条边若出现, 则至少两次. 下面分析非消失项.

Claim: 非消失项满足 $i_3=i_1$ 或 $i_4=i_2$

若 $i_3\neq i_1$. 对 $a_{i_1i_2}\,a_{i_2i_3}\,a_{i_3i_4}\,a_{i_4i_1}$.

知 $a_{i_1i_2}$ 与 $a_{i_2i_3}$ 不同, 这时 $a_{i_3i_4}$ 必为其中之一.

与 $a_{i_1i_2}$ 相同时 有 $i_1=i_4$ 且 $i_2=i_3$ 可

$a_{i_1i_2}^2\,a_{i_2i_2}\,a_{i_1i_1}$ 期望为 0

与 $a_{i_2i_3}$ 相同时 有 $i_2=i_4$

不妨设 $i_3=i_1$, 有如下四类. (该分类只与4有关 和n无关)

Type 1 $i_3=i_1$, $i_4\neq i_2\neq i_1$

$$\sum_{i_4\neq i_2\neq i_1} \mathbb{E}[a_{i_1i_2}^2\,a_{i_4i_1}^2] = n(n-1)(n-2)$$

(类似, $i_4=i_2$ 时 $\sum_{i_1\neq i_2\neq i_3} \mathbb{E}[\quad] = n(n-1)(n-2)$)

Type 2 $i_3=i_1$, $i_4=i_2\neq i_1$

$$\sum_{i_1\neq i_2} \mathbb{E}[a_{i_1i_2}^4] = O(n^2)$$

Type 3 $i_3=i_1=i_2$, $i_4\neq i_2$

$$\sum_{i_2\neq i_4} \mathbb{E}[a_{i_1i_1}^2\,a_{i_4i_1}^2] = O(n^2)$$

Type 4 $i_1=i_2=i_3=i_4$

$$\sum_{i_1} \mathbb{E}[a_{i_1i_1}^4] = O(n)$$

总之. $RHS = 2n(n-1)(n-2) + O(n^2)$.

一般情形. 期望为0和独立性表明非消失项至多有 $\frac{k}{2}$ 条不同边.

因此 $i_1 \dots i_k$ 中不同点数至多有 $[\frac{k}{2}]+1$ $\rightarrow [\frac{k}{2}]$ (整数).

(since 除了第一个点外 每新出一个顶点就会新出现一条边, 所以反证即可).

可知 $RHS = O(n^{[\frac{k}{2}]+1})$ (从分类的角度看)

立即 当 $k=2m+1$ 时, $RHS = O(n^{m+1}) \Rightarrow$ 奇阶矩 为 $\gamma_{2m+1} \to 0$

No.

Date. / /

当 $k=2m$ 时.（用到一些随机游走的知识）

次要项为 $O(\frac{1}{n})$（互不相同顶点 $<m$ 个）

只 CHECK 主项（互不相同顶点数恰为 m 个）.

自由顶点个数为 $m+1$ 个. 不同边个数为 m 个.（每条边恰好出现两次）

此时 $(i_1, i_2, \dots i_{2m})$ 为一条不相交路径.

E.g $m=3$ 典型路径

$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_3, i_2)$ $\quad i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4$

$(i_1, i_2, i_1, i_3, i_1, i_4)$

但 $(i_1, i_2, i_3, i_1, i_2, i_3)$ 自由顶点非最大只是会消失用.

E.g. $\overset{1\,2\,3\;\,2\;\,1\;4\,5\;\,4}{11-1-1\,11-1-1}$ 括号消去.

（如何反过去？）

计数问题

对不相交路径可构造序列 $(a_1, a_2, \dots a_{2m})$ 1-1对应

$$a_j = \begin{cases} 1 & i_j i_{j+1} \text{ 在旅行 } i_1i_2, i_2i_3, \dots i_{2m}i_1 \text{ 中首次出现.} \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

E.g. $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_3, i_2)$ $\qquad (i_1, i_2, i_1, i_3, i_1, i_4)$

$\quad\;\; 1 \quad 1 \quad 1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \qquad\quad 1 \;\; -1 \quad 1 \;\; -1 \quad 1 \;\; -1$

令 $S_i = S_{i-1} + a_i$. $S_0 = 0$

得到一个对称随机游走 $\{S_i\}$. 满足 $S_0 = S_{2m} = 0$

且 $S_i \geq 0$, $\forall i$

轨道数：$\frac{1}{m+1} C_{2m}^{m}$

RHS 主项 $= \frac{1}{n^{m+1}} \quad n(n-1) \cdots (n-m+1)$

$\to \gamma_{2m}$.

注：$\rho_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2,2]$.

$\int x^k \rho_{sc}(x) dx = \gamma_k$

※不相交 则一定有相邻

从相邻开始消

左括号与右括号对应

偶阶矩 $1, 2, 3, 4 \dots 2m-1, 2m$. 不相交配对数.（恰为卡特兰数）

E.g. 1 2 3 4 $\quad$ 1 2 3 4 $\qquad$ 1 2 3 4 $\qquad$ 半圆律与

不相交配对. $\qquad\qquad$ 相交配对 $\qquad$ 标准正态分布区别.

No.
Date. / /

道可道，非常道，名可名，非常名 ——老子《道德经》
精粗所传非粹美，丹青难写是精神 ——王安石

统计力学初步

§1 信息熵

概率为p的事件发生，用$S(p)$表示惊奇度.

$S(p)$应满足条件？

公理I：$S(1)=0$

即必然事件不会引起惊奇

公理II：$S(p)$严格减函数

即越不可能发生的事件发生，表达越多信息.

公理III：$S(p)$为连续函数

此外

若E，F独立 $P(E)=p$，$P(F)=q$.

$S(pq)-S(q)$：先听到F发生，再听到E发生所增加的惊奇程度.

公理IV：$S(pq)=S(p)+S(q)$

定理1：满足公理I~IV函数为

$$S(p)=-c\ln p \quad ,c>0$$

证明：$\cdot\ S(p^m)=m\,S(p)$

$\cdot\ S(p^{\frac{1}{n}})=\frac{1}{n}S(p)$

$\Rightarrow S(p^{\frac{m}{n}})=\frac{m}{n}S(p)$

再由连续型和稠密性知

$S(p^x)=x\,S(p) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

取$x=-\ln p$

则$S(p)=S((\frac{1}{e})^x)=x\,S(\frac{1}{e}) \qquad$ 又$S(\frac{1}{e})>S(1)=0$

令$S(\frac{1}{e})=c \quad \Rightarrow \quad S(p)=-c\ln p \quad ,c>0.$

后三行有点问题：取$x=-\frac{1}{\ln p} \rightarrow S(\frac{1}{e})=-\frac{1}{\ln p}S(p)$

$\Rightarrow S(p)=-S(\frac{1}{e})\ln p.$ #

扫描全能王 创建

离散型随机变量

X	$x_1 \cdots x_n$
P	$p_1 \cdots p_n$

定义：（Shannon 熵）

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \qquad p_i := P(x_i)$$

联合熵：$H(X,Y) = -\sum_{i,j} P(x_i,y_j) \ln P(x_i,y_j)$

条件熵：$H_Y(X) = \sum_j H_{Y=y_j}(X) P_Y(y_j)$

其中 $H_{Y=y_j}(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i|y_j) \ln P(x_i|y_j)$

注：此定义可以扩充到可列多个情形

条件熵与熵有何关系？

引理2： $H(X,Y) = H(Y) + H_Y(X)$

证明：
$$H(Y) + H_Y(X) = H(Y) + \left(-\sum_j \sum_i P(x_i,y_j) \ln \frac{P(x_i,y_j)}{P_Y(y_j)}\right)$$
$$= H(Y) + H(X,Y) - H(Y)$$
$$= H(X,Y)$$

引理3： $H_Y(X) \le H(X)$ "=" 成立 $\Leftrightarrow$ X, Y 独立

证明：
$$H_Y(X) - H(X) = -\sum_{i,j} P(x_i,y_j) \ln \frac{P(x_i,y_j)}{P_Y(y_j)} + \sum_i P_X(x_i) \ln P_X(x_i)$$

$$\sum_i P_X(x_i) \ln P_X(x_i) = \sum_{i,j} P(x_i,y_j) \ln P_X(x_i)$$

$$= +\sum_{i,j} P(x_i,y_j) \ln \frac{P_Y(y_j) P_X(x_i)}{P(x_i,y_j)}$$

$\ln x \le x-1, \ \forall x>0$
$$\le \sum_{i,j} P(x_i,y_j) \left(\frac{P_Y(y_j) P_X(x_i)}{P(x_i,y_j)} - 1 \right)$$
$$= \sum_{i,j} P_Y(y_j) P_X(x_i) - P(x_i,y_j)$$
$$= 0$$

"=" 当且仅当 $\frac{P_X(x_i) P_Y(y_j)}{P(x_i,y_j)} = 1 \quad \forall x_i, y_j$ （此外 $P(x_i,y_j)=0$ 是

即 X, Y 独立.

定理： $\forall g$. $H(g(X)) \le H(X)$.

$$H(g(X)) = -\sum_{i\in I} P(g(X)=i) \log(P(g(X)=i)) = -\sum_{i\in I} \sum_{x:g(x)=i} P(x) \log\Big(\sum_{x:g(x)=i} P(x)\Big)$$
$$\overset{\text{琴生}}{\le} -\sum_{i\in I} \sum_{x:g(x)=i} P(x) \log P(x) = -\sum_x P(x) \log P(x) = H(X). \ \#$$

No.
Date. / /

最大熵： $\max\{H(X): \sum_{i=1}^{n} p_i=1\} = H(\frac{1}{n},\dots\frac{1}{n}) = \ln(n)$ (琴生不等式即可)

且 $H(\frac{1}{n},\dots\frac{1}{n}) > H(\frac{1}{n-1},\dots \frac{1}{n-1})$

$n=2$ ：掷硬币 (均匀情况 熵最大，不确定性最大反映为很难猜到

反之，一个硬币比如正面概率为0.9，则熵小一些，很好猜

· 熵是刻划不确定或无序程度的度量.

熵越大，不确定性越高.

连续型随机变量

定义2： X 有密度 f

$$H(X) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln f(x)\,dx$$

$$H(X,Y) = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ln f(x,y)\,dx\,dy$$

令 $\eta(u) = -u\ln u$, $u\geq 0$. 寻找一些不等式关系.

$$\eta(u)-\eta(v) = \eta'(v)(u-v) + \frac{\eta''(\xi)}{2}(u-v)^2$$

$$= (-\ln v-1)(u-v) + \underbrace{\frac{\eta''(\xi)}{2}}_{\leq 0}(u-v)^2$$

$$\leq -(1+\ln v)(u-v)$$

即

引理4 Gibbs 不等式

(i) $u-u\ln u \leq v-u\ln v$ CHECK: $u\ln\frac{v}{u} \leq u(\frac{v}{u}-1) = v-u$.

(ii) 对 $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, $p_i, q_i \geq 0$, 则

$-\sum_{i=1}^{n} p_i\ln p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i\ln q_i$ CHECK: $\sum_{i=1}^{n} p_i\ln\frac{q_i}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(\frac{q_i}{p_i}-1)=0$

"=" 成立 $\Leftrightarrow$ $p_i = q_i$ $\forall i$.

取 $u=f(x)$, $v=g(x)$. f,g 为密度 用 Gibbs Ineq (i) 并积分知

$$\int f(x) - f\ln f\,dx \leq \int g - f\ln g\,dx$$

即 $-\int f\ln f\,dx \leq \int -f\ln g\,dx$ (since $\int f = \int g = 1$)

No.

Date.　　/　　/

记 $D_f := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$

定理5 (i) 若 $D = (-\infty, +\infty)$，$E[X] = 0$，$Var(X) = 1$，则标准正态分布熵最大，为 $\ln\sqrt{2\pi e}$

(ii) 若 $D = (0, +\infty)$，$E[X] = \frac{1}{\lambda}$，$\lambda > 0$ 则指数分布 $EXP(\lambda)$ 熵最大，为 $\ln\frac{e}{\lambda}$.

(iii) 有界区域 $D = (0, a)$ 为例，则均匀分布 $U(0, a)$ 熵最大，为 $\ln a$.

证明：(i) $g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，用 Gibbs Ineq

$$H(X) \le -\int f\left(-\frac{x^2}{2} - \log\sqrt{2\pi}\right) dx$$
$$= \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} Var(X)$$
$$= \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}$$
$$= \log\sqrt{2\pi e}$$ 为 $N(0,1)$ 的熵.

(ii), (iii) 类似 留为 homework.

§2 Gibbs 分布

Maxwell 1878, Nature

The truth of second law is STATASTIC, not a methematical truth, ...

最大熵原理：孤立系统中熵不减少的.

f 为密度，在约束条件 $\int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx = \bar{g}$ （$\bar{g}$ 给定）

令 $f_0(x) = \frac{1}{z} e^{-c g(x)}$ （z 是归一化常数），Gibbs 分布

则 $H(f_0)$ 最大，为 $\underbrace{\ln z + c\bar{g}}_{\text{热力学熵}}$.

此前 $H(\frac{1}{n}, \dots \frac{1}{n}) = \log n$ 称为 Boltzmann 熵. 最初形式 $S = k \ln |\Omega|$.

No.
Date. / /

能级： $E_1 \ldots E_n$
概率： $p_1 \ldots p_n$
平均能量 $\sum_{i=1}^{n} p_i E_i = U$
当U给定，考虑如何分布熵最大？
取 $q_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$, $i=1,2\ldots n$
$Z = \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta E_i}$ 熵最大.

统计力学
基础假设
(i) 微观状态：Ω
(ii) 状态间相互作用：哈密顿量 $H: \Omega \to \mathbb{R}$
当 $|\Omega| < \infty$ 时，$\mu \in M_1(\Omega)$ μ理解成一个分布列. M_1 指可以归一的一个分布列
完全由 $\{\mu(\{\omega\}) : \omega \in \Omega\}$ 决定.
(或者μ直接理解为概率.)
记 $\langle g \rangle_\mu := \sum_{\omega \in \Omega} g(\omega)\mu(\omega)$

定义：Gibbs（正则）分布
$$\mu_{\beta,N}(\omega) := \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\omega)}$$
这里 β 为逆温度，$N = |\Omega|$，$\underbrace{Z = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}}_{\text{配分函数}}$.
$e^{-\beta H(\omega)}$ 也称为权重.

考察热力学极限. $N \to \infty$.
(连续气体模型)
例1: $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$, N个粒子 $\{p_k, q_k\}_{k=1}^{n}$ (位置和动量)
$$\Omega_{\Lambda;N} = (\mathbb{R}^d \times \Lambda)^N$$
(动能: $\frac{(mv)^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$) 粒子相互作用
$$H(p,q) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\|p_k\|_2^2}{2m} + \sum_{k \le i < j \le N} \phi(\|q_j - q_i\|_2)$$
$$Z = \int_{\Omega_{\Lambda;N}} e^{-\beta H(p,q)} d^N p \, d^N q.$$

（格子点）　构造样本空间.

例2 格点气体 有限$\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$，$\Omega_\Lambda = \{0,1\}^\Lambda$ 或$\{-1,1\}^\Lambda$.

构造 $H(\omega) := \sum_{i,j \in \Lambda} \varepsilon_{ij} \omega_i \omega_j$

Ising 模型 $\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & i,j \text{ 相邻} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Curie-Weiss模型 $\varepsilon_{ij} = 1$. $\forall i,j$.

回顾: Gibbs 分布

$H: \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}$ 哈密顿量.

$\mu(\omega) := \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\omega)}$, where $Z = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta H(\omega)}$

假设:

$N = |\Lambda| \to \infty$ （微观粒子量一般很大）

Ising 模型

磁铁加热时，当温度到达某个程度时，磁性消失.

临界温度（居里温度） 1895

1920 lenz 理解相变现象.

1925 Ising 1维 Ising 模型

记号 $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ 构形空间 $\Omega_\Lambda := \{1,-1\}^\Lambda$ （1,-1 便于表示磁,

$N := |\Lambda|$. $\mathcal{E}_\Lambda := \{\{i,j\} \subset \Lambda : \|i-j\| = 1\}$ （距离为1连一条边）

$\|i\|_1 = \sum_{k=1}^{d} |i_k|$, where $i = (i_1, \dots i_d)$ 　$\sigma = (\sigma_1, \dots \sigma_N)$ （理解为自旋方向

$\langle \ \rangle$:期望

定义: Ising 模型 Gibbs 分布.

(i) 自由边界 强调自由边界 相互作用 外场

$$H^{\emptyset}(\sigma) = -J \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{j \in \Lambda} \sigma_j.$$

统计力学告诉我们其概率.

$$\mu^{\emptyset}_{\Lambda;\beta,h}(\sigma) = \frac{1}{Z^{\emptyset}_{\Lambda;\beta,h}} e^{-\beta H^{\emptyset}(\sigma)}, \quad Z^{\emptyset}_{\Lambda;\beta,h} = \sum_{\sigma} e^{-\beta H^{\emptyset}(\sigma)}$$

其中 $\beta \in [0, +\infty]$. $\beta = \frac{1}{kT}$.

No.
Date. / /

(ii) 周期边界 $\Lambda = [1,L]^d \cap \mathbb{Z}^d$ (正方体中格子点)

$$H(\sigma) = -J \sum_{\|i-j\|_1 = 1 \bmod L} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{j\in\Lambda_L} \sigma_j$$

$$Z_{\Lambda_L;\beta,h} = \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)} \qquad \mu_{\Lambda_L;\beta,h}(\sigma) = \frac{1}{Z_{\Lambda_L;\beta,h}} e^{-\beta H(\sigma)}$$

磁化强度 M.

$$M_\Lambda := \sum_{j\in\Lambda} \sigma_j$$

直观想法. $\beta \to 0$, 高温 独立和 $\rightsquigarrow \sigma = (\sigma_1, \dots \sigma_N) \in \{+1,-1\}^N$ (等概率取±1)

$\beta \to \infty$, 低温 $H(\sigma)$尽量小.

问题: $\beta \in (0,+\infty)$ 能量与熵竞争 $\rightsquigarrow$ 相变现象 (Eg: 冰变水, 不连续 不可微 …)

一维Ising: 考虑 $d=1$. 周期条件: $\sigma_{N+1} = \sigma_1$

$$H(\sigma) = -J \sum_{k=1}^N \sigma_k \sigma_{k+1} - \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n (\sigma_k + \sigma_{k+1}) \qquad J>0\text{为铁磁.}$$

一个注记: 配分函数非常重要. 如何求配分函数?

$$\frac{\partial}{\partial h} (\log Z_{\Lambda_L;\beta,h}) = \beta \langle M_{\Lambda_L} \rangle \qquad M_{\Lambda_L} := \sum_{k=1}^N \sigma_k$$

$$Z_{N;\beta,h} = \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N = \pm1} e^{\beta J \sum_k \sigma_k \sigma_{k+1} + \frac{\beta h}{2} \sum_k (\sigma_k + \sigma_{k+1})}$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm1} \prod_{k=1}^N e^{\beta J \sigma_k \sigma_{k+1} + \frac{\beta h}{2}(\sigma_k + \sigma_{k+1})}$$

引入矩阵

$$\langle \sigma | P | \sigma' \rangle = e^{\beta J \sigma\sigma' + \frac{\beta h}{2}(\sigma+\sigma')} \qquad \sigma, \sigma' = \pm1. \text{ 表示 } (\sigma,\sigma')\text{处矩阵元.}$$

即

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{pmatrix} \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \end{array} \qquad \text{转移矩阵.}$$

注: $|\sigma=1\rangle = \binom{1}{0}$

$|\sigma=-1\rangle = \binom{0}{1}$

有 $Z_{N;\beta,h} = \mathrm{Tr}\, P^N$ $\qquad \langle \sigma | = |\sigma\rangle^T$

CHECK: $N=1$ 容易见.

$$N=2 \qquad \sum_{\sigma_1=\pm1} \sum_{\sigma_2=\pm1} \langle \sigma_1 | P | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | P | \sigma_1 \rangle \qquad \left[\sum_{\sigma=\pm1} |\sigma\rangle\langle\sigma| = I\right]$$

$$= \sum_{\sigma_1} \langle \sigma_1 | P^2 | \sigma_1 \rangle = \mathrm{tr}\, P^2.$$

No.

Date.　　/　/

引理：$Z_{N;\beta,h} = \lambda_+^N + \lambda_-^N$　　（λ_+, λ_- 即为 P 特征值）

$\lambda_\pm = e^{\beta J}\left(\cosh(\beta h) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}}\right)$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$，$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

之即 $\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{\beta}\log Z_{N;\beta,h}\right) = \frac{1}{N}\langle \sum_{k=1}^N \sigma_k \rangle$

$\rightarrow$ $\cancel{\frac{\partial}{\partial h}\frac{1}{\beta}\lambda_+^N}$ $\frac{\partial}{\partial h}\frac{1}{\beta}\lambda_+ = \frac{\sinh(\beta h)}{\sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}}}$

记 $M_N := \sum_{k=1}^N \sigma_k$

矩母函数 $\langle e^{t\frac{M_N}{N^\delta}} \rangle = \frac{Z_{N;\beta,h+\frac{t}{\beta N^\delta}}}{Z_{N;\beta,h}}$　since（$= \sum_{\text{所有状态}} \frac{e^{-\beta H}}{Z_{N;\beta,h}} e^{t\frac{M_N}{N^\delta}}$）

为方便只看 $h=0$ 的情况 $= \frac{Z_{N;\beta,\frac{t}{\beta N^\delta}}}{Z_{N;\beta,0}}$　取合适 $\delta = 1$　类似 LLN

$\delta = \frac{1}{2}$　类似 CLT.

recall:

$d=1$ 无相变现象

Eg：$M_N = \sum_{k=1}^N \sigma_k$，$\beta(0,+\infty)$　研究 $N\to\infty$ 的情况.

$\langle e^{t\frac{M_N}{N^\delta}} \rangle$

$\uparrow$ 伸缩

记 $A_\pm(h) = \cosh(\beta h) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}}$

$\log\langle e^{t\frac{M_N}{N^\delta}}\rangle = \cancel{\log\frac{A_+^N + A_-^N}{}}$

$= \log\frac{A_+^N\left(\frac{t}{\beta N^\delta}\right) + A_-^N\left(\frac{t}{\beta N^\delta}\right)}{A_+^N(0) + A_-^N(0)}$　　(*)

易知 $\cosh\left(\frac{t}{N^\delta}\right) \overset{\text{Taylor}}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{N^\delta}\right)^2 + o\left(\frac{1}{N^{3\delta}}\right)$

$\sqrt{\sinh^2\left(\frac{t}{N^\delta}\right) + e^{-4\beta J}} = \sqrt{\left(\frac{t}{N^\delta}\right)^2 + e^{-4\beta J} + o\left(\frac{1}{N^{2\delta}}\right)}$

$= e^{-2\beta J}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{e^{-4\beta J}}\left(\frac{t}{N^\delta}\right)^2 + \dots\right)$

$= e^{-2\beta J} + \frac{1}{2}e^{2\beta J}\left(\frac{t}{N^\delta}\right)^2 + o\left(\frac{1}{N^{3\delta}}\right)$

代入(*) $= \log\frac{\left(1 + \frac{1}{2A_+(0)}(1+e^{2\beta J})\frac{t^2}{N^{2\delta}} + \dots\right)^N + \left(\frac{A_-(0)}{A_+(0)} + O\left(\frac{1}{N^{2\delta}}\right)\right)^N}{1 + \left(\frac{A_-(0)}{A_+(0)}\right)^N}$

依多项式速度收敛　　　依 $(r<1)$ r^N 指数收敛，可以忽略.（$N-$

$= N\log\left(1 + \frac{1}{2A_+(0)}(1+e^{2\beta J})\frac{t^2}{N^{2\delta}}\right)$

$= N\left(\frac{1+e^{2\beta J}}{2A_+(0)}\frac{t^2}{N^{2\delta}} + O\left(\frac{1}{N^{3\delta}}\right)\right)$

No.
Date. / /

取 $\delta=1$

定理：(i) $\frac{M_N}{N} \xrightarrow{P/D} 0$

取 $\delta=\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{M_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{1+e^{2\beta J}}{1+e^{-2\beta J}})$ （矩母函数 $= e^{\frac{1+e^{2\beta J}}{1+e^{-2\beta J}}t^2}$）

$d\geq 2$ 非平凡. 例出一些好的结果

$d=2$, $h=0$

$$\Rightarrow \langle \frac{|M_\Lambda|}{|\Lambda|} \rangle \longrightarrow \begin{cases} 0, \beta<\beta_t & \text{（温度较高）} \\ \left(1-\left(\frac{2(1-p)}{p(2-p)}\right)^4\right)^{\frac{1}{8}}, & \beta\geq\beta_t \end{cases}$$

$p=1-e^{-2\beta}$, $p_c=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. C.N. Yang.

Curie-Weiss 模型

Ising 模型 取 $\Lambda=[1,L]^d \cap \mathbb{Z}^d$（正方体盒子）

$H(\sigma)=-J\sum \sigma_i\sigma_j - h\sum \sigma_j$ $i\sim j$：表示 i,j 邻近.

近似（平均场模型）

$$-J\sum_{j:j\sim i} \sigma_i\sigma_j = -2dJ\frac{\sigma_i}{2d}\sum_{j:j\sim i}\sigma_j$$ 平均后与 d 无关

定义：Curie-Weiss 模型.（方便起见. $d,J=1$）

对应哈密顿量. $H(\sigma)=-\frac{1}{2N}(\sum_{k=1}^N \sigma_k)^2 - h\sum_{k=1}^N \sigma_k$

格点格数

$$\mu^{CW}_{N;\beta,h}(\sigma)=\frac{1}{Z^{CW}_{N;\beta,h}}e^{-\beta H(\sigma)}$$

其中. $Z^{CW}_{N;\beta,h}=\sum_\sigma e^{-\beta H(\sigma)}$

注：标准的 C-W 模型 哈密顿量定义为

$$H(\sigma)=-\frac{d\beta}{N}\sum_{i,j=1}^N \sigma_i\sigma_j - h\sum_{i=1}^N \sigma_i$$

（数似作业中 认为 $H(\sigma)=-\frac{d}{N}(\sum\sigma_i)^2-\frac{h}{\beta}\sum\sigma_i$）

探讨总磁矩临界行为.（此就是一个相变行为）

定理1 $\beta_c=1$, $h=0$.

(i) 当 $\beta\in(0,\beta_c]$ 时, $\exists\, C_1=C_1(\beta,\varepsilon)$

$$\mu^{CW}_{N;\beta,0}\left(\frac{M_N}{N}\in(-\varepsilon,\varepsilon)\right)\geq 1-2e^{-C_1N}$$

$\frac{M_N}{N}\xrightarrow{P}0$ （依概率收敛到一个值 常值变量）

(ii) 当 $\beta\in(\beta_c,+\infty)$ 时, $\exists\, m^*(\beta)$, $C_2=C_2(\beta,\varepsilon)$ $\frac{M_N}{N}\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{2}(\delta_{m^*}+\delta_{-m^*})$

$$\mu^{CW}_{N;\beta,0}\left(\frac{M_N}{N}\in(-m^*(\beta)-\varepsilon,-m^*(\beta)+\varepsilon)\cup(m^*(\beta)-\varepsilon,m^*(\beta)+\varepsilon)\right)\geq 1-2e^{-C_2N}$$

（… 两个值 …）

引理: $\beta\in(0,+\infty)$, $h=0$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Z^{CW}_{N;\beta,0}=-\min_{m\in[-1,1]}\{f^{CW}_\beta(m)\}$$

其中 $f^{CW}_\beta(m)=-\frac{1}{2}\beta m^2-S(m)$

其中 $S(m)=-\frac{1-m}{2}\log\frac{1-m}{2}-\frac{1+m}{2}\log\frac{1+m}{2}$

且 $\forall J\subset[-1,1]$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\mu^{CW}_{N;\beta,0}\left(\frac{M_N}{N}\in J\right)=-\min_{m\in J}I^{CW}_\beta(m)\leq 0$$

若 $\min f^{CW}_\beta$ 不在J中取（<0 得到 $\mu\propto e^{-N\cdots}$ 指数…

其中 $I^{CW}_\beta(m)=f^{CW}_\beta(m)-\min_{m'\in[-1,1]}f^{CW}_\beta(m')\geq 0$

$I^{CW}_\beta(m)$: 速率函数.

先承认引理

定理的证明: $f(m)=-\frac{\beta m^2}{2}+\frac{1-m}{2}\log\frac{1-m}{2}+\frac{1+m}{2}\log\frac{1+m}{2}$

只需找 f 极值点.

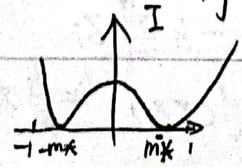
$$f'(m)=-\beta m+\log\frac{1+m}{1-m}=0$$

$$f''(m)=-\beta+\frac{1}{1-m^2}=0 \qquad m^2=1-\frac{1}{\beta}$$

(i) $\beta\in(0,1]$ 时 $f''(m)\geq 0$ 注意到 $f'(0)=0$

$\Rightarrow$ 唯一解 $m=0$

(ii) $\beta\in(1,+\infty)$ 时 $f'(m)=0$ 有3个解 $m=0,\pm m^*(\beta)$



No.
Date. / /

引理证明: 记 $A_N := \{-1+\frac{2k}{N} : k=0,1,\dots N\}$, $J\subset[-1,1]$

则 $\mu(\frac{M_N}{N}\in A_N\cap J)$ ($\frac{M_N}{N}\in A_N$ 是自然用)

$$\Rightarrow \mu(\frac{M_N}{N}\in J\cap A_N)=\sum_{m\in J\cap A_N}\mu(\frac{M_N}{N}=m)$$

$$=\sum_{m\in A_N\cap J}\frac{1}{Z_N}e^{\frac{\beta}{2}m^2N}\binom{N}{\frac{1+m}{2}N}$$ ⇐ M_N 为±1求和.

其中 $Z_N=\sum_{m\in A_N\cap J}e^{\frac{\beta}{2}m^2N}\binom{N}{\frac{1+m}{2}N}$

FACT: $\exists\, C_-,C_+$ s.t.

$$C_-N^{-\frac12}e^{NS(m)}\le\binom{N}{\frac{1+m}{2}N}\le C_+N^{-\frac12}e^{NS(m)}$$

用斯特林公式放缩.

上界: $Z_N\le C_+N^{-\frac12}(N+1)e^{N\max_m\{\frac{\beta m^2}{2}+S(m)\}}$

$$\limsup_N\frac1N\log Z_N\le-\min_{m\in[-1,1]}\{f_\beta^{CW}(m)\}\quad ①$$

下界 $\exists\, m_0$, s.t. $f_\beta^{CW}(m_0)=\min_{m\in[-1,1]}f_\beta^{CW}(m)$

选取一些 $m\in A_N$ (一个即可)

s.t. $|f_\beta^{CW}(m)-f_\beta^{CW}(m_0)|<\varepsilon$

因此, $Z_N\ge C_-N^{\frac12}e^{-N(f_\beta^{CW}(m_0)+\varepsilon)}$

$$\liminf_N\frac1N\log Z_N\ge-f_\beta^{CW}(m_0)-\varepsilon.\quad ②$$

由①,② 夹逼即可.

下考虑中心极限定理

$$\langle e^{t\frac{M_N}{N^\delta}}\rangle_{h=0}=\frac{Z_{N;\beta,\frac{t}{\beta N^\delta}}}{Z_{N;\beta,0}}$$

处理二次项: $\int\frac{e^{-\frac12x^2+xy}}{\sqrt{2\pi}}dx=e^{\frac{y^2}{2}}$

$$Z_{N;\beta,h}=\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12x^2}\sum_\sigma e^{x\sqrt{\frac{\beta}{N}}\sum_i\sigma_i+\beta h\sum_i\sigma_i}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12x^2}\left(e^{x\sqrt{\frac{\beta}{2N}}+\beta h}+e^{-(x\sqrt{\frac{\beta}{2N}}+\beta h)}\right)^N dx$$

$$\overset{x\sqrt{\frac{\beta}{2N}}+\beta h=x}{=\!=}\sqrt{\frac{N}{2\pi\beta}}\int e^{-\frac{\beta}{2}h^2N+hNx-Ng(x)}dx,\quad \text{where } g(x)=\frac{x^2}{2\beta}-\log(e^x+e^{-x})$$

No.
Date. / /

$$\langle e^{t\frac{M_N}{N^\delta}}\rangle_{h=0} = e^{-\frac{t^2}{2\beta N^{2\delta-1}}}$$

$$\frac{\int e^{\frac{t}{\beta}N^{1-\delta}x - Ng(x)}dx}{\int e^{-Ng(x)}}$$

记 $I_N = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t}{\beta}N^{1-\delta}x - Ng(x)} dx.$

一个证斯特林公式的~~解释~~方法.

由 $N! = \int_0^\infty x^N e^{-x}dx$　先找 $f(x) = x^N e^{-x}$ 极值：$f'(x) = (N-x)x^{N-1}e^{-x} = 0$

$\Rightarrow x = N$

$= N^{N+1}\int_0^\infty e^{-Ng(x)}dx$

$g(x) = x - \log x, \Rightarrow g'(x_0) = 0,\ x_0 = 1.$

Laplace method

$$\int_0^\infty e^{-N(g(x)-g(x_0))}dx \approx \int_{1-\delta}^{1+\delta} e^{-N(g(x)-g(x_0))}dx + O(e^{-CN})$$

$$\boxed{\begin{aligned}&g(x)-g(x_0)\\ &= \frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\\ &+O((x-x_0)^3)\end{aligned}}\int_{-\sqrt{N}\delta}^{\sqrt{N}\delta} e^{-\frac{g''(x_0)}{2}y^2}dy$$

回到原题: $g'(x) = \frac{x}{\beta} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0$

$g''(x) = \frac{1}{\beta} - \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$　(if $\beta \le 1$).

$\Rightarrow g'(x) = 0$ 有唯一解 $x_0 = 0$　(0为唯一最小值).

Laplace 方法表明

$$e^{Ng(x_0)} I_N = \int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{t}{\beta}N^{1-\delta}x - N(g(x)-g(x_0))} dx + O(e^{-CN})$$

Taylor 展开

$$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2\beta}x^2 - \log\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2\beta}x^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + O(x^5)$$

$$= \frac{1-\beta}{2\beta}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + O(x^5)$$

(I) $\beta \in (0,1)$, $\delta = \frac{1}{2}$　$\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\beta(1-\beta)}\right)$

$$e^{Ng(x_0)} I_N \sim \int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{t}{\beta}\sqrt{N}x - x^2 N\frac{1-\beta}{2\beta}} dx$$

$$= \int_{-\delta\sqrt{N}}^{\delta\sqrt{N}} e^{\frac{t}{\beta}x - \frac{1-\beta}{2\beta}x^2} d\frac{x}{\sqrt{N}}.$$

$$\sim \frac{\beta}{\sqrt{N}}\int_{\mathbb{R}} e^{tx - \frac{\beta(1-\beta)}{2}x^2}dx$$

$$\Rightarrow \langle e^{t\frac{M_N}{N^\delta}}\rangle \sim \frac{\frac{\beta}{\sqrt{N}}\int e^{tx - \frac{\beta(1-\beta)}{2}x^2}dx}{\int e^{-\frac{\beta(1-\beta)}{2}x^2}dx} = \frac{\beta}{\sqrt{N}} e^{\frac{t^2}{2\beta(1-\beta)}}$$

概率论

No.
Date.　/　/

期末要点：

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

设 X_k 独立同，$\mu = \mathbb{E}[X_k]$

(I) 强大数律 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s} \mu$

(II) 中心极限定理 $\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu) \xrightarrow{D} N(0,1)$　　$(Var(X_k)=\sigma^2>0)$

概念，方法，定理，味道.（理论，应用）

$X: \Omega \to \mathbb{R}$　Borel 可测

特征函数.　联合密度 ⟶ 变量替换.

多元正态（尤为一元，二元）　条件期望. 密度 $f_{Y|X}(y|x)$，条件矩.

四种收敛（定义定理反例）

B-C 引理

Lindeberg 条件 CLT（⇐ 矩条件来验）

作业道，精选道，四章一道，四种收敛一道.

(II) $\beta=1$, $\delta=\frac{3}{4}$.

$$e^{Ng(x_0)} I_N \sim \int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{t}{\beta}N^{\frac{3}{4}}x - \frac{N}{12}x^4} dx$$

$$= \int_{-\delta N^{\frac{1}{4}}}^{\delta N^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{t}{\beta}x - \frac{x^4}{12}} d\frac{x}{N^{\frac{1}{4}}}$$

$$\sim N^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - \frac{1}{12}x^4} dx$$

$$\Rightarrow \frac{M_N}{N^{\frac{3}{4}}} \xrightarrow{D} \frac{e^{-\frac{1}{12}x^4}}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{12}x^4}dx} dx$$